Warum Mathe?

ig-mathe

März 2012

Inhalt

1 Mengen

Definition 1: »Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.« (Cantor)

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Mengen zu definieren. Durch (komplette) Aufzählung der Elemente:

$$\{1, 2, 3\} \quad \text{bzw.} \quad \{Hans, Martin, Lisa\} \quad \text{bzw.} \quad \{1, 2, 3, \dots, 7\},$$

oder durch Angaben von Eigenschaften, die alle Elemente der Menge erfüllen:

$$\{x : P(x)\}$$

ist die Menge aller x, für welche die Aussage $P(x)$ wahr ist. Hierbei ist es notwendig, dass eine Grundmenge angegeben wird, da z. B. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 9\}$ und $\{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 9\}$ verschiedene Mengen definieren. (Notationshinweis: Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Durch Auswahl von Elementen aus einer bereits definierten Menge entstehen neue Mengen, sogenannte *Teilmengen*.

Definition 2 (Teilmengen)**:** Seien M und N Mengen. M ist Teilmenge von N (kurz: $M \subset N$genau dann, wenn gilt:

$$\forall x \in M : x \in N.$$

N heißt dann Obermenge von M (kurz: $N \supset M$).

Definition 3 (Komplement)**:** Seien M und N Mengen; $M \subset N$. Die Menge

$$\overline{M} := \{x \in N : x \notin M\}$$

heißt Komplement von M in N.

Definition 4 (Leere Menge)**:** Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge. Wir schreiben dafür $\emptyset$.

Bemerkung 1: Existenzaussagen ($\exists x \in \emptyset : \widehat{P}(x)$) sind für die leere Menge immer falsch, da es kein Element in der leeren Menge gibt, auf das die Eigenschaft P zutreffen kann.

Was aber gilt für Allaussagen ($\forall x \in \emptyset : P(x)$) im Zusammenhang mit der leeren Menge? Sind diese auch alle falsch oder kommt es auf die Situation an? Zeit für den ersten Beweis!

Satz 1: Folgende Aussage ist für alle Aussageformen $P(x)$ richtig: $\forall x \in \emptyset : P(x)$.

Beweis. Sei $P(x)$ eine beliebige Aussageform und $Q(x)$ die Aussage: $\forall x \in \emptyset : P(x)$. Laut Logikregeln gilt, dass $Q(x)$ genau dann richtig ist, wenn die Negation von $Q(x)$ (wir schreiben: $\neg Q(x)$) falsch ist.

$$\neg Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \neg\forall x \in \emptyset : P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \emptyset : \neg P(x).$$

Da laut Bemerkung 1 Existenzaussagen für die leere Menge (mit $\widehat{P}(x) = \neg P(x)$) immer falsch sind, ist somit $\neg Q(x)$ falsch und damit die Aussage $Q(x)$ wahr. Da $P(x)$ eine beliebige Aussageform war, gilt dieser Beweis für alle Aussageformen $P(x)$. Somit ist Satz 1 bewiesen. $\square$

Bemerkung 2: Folgende Aussagen gelten für jede beliebige Menge A:

$$A \subset A \quad \text{sowie} \quad \emptyset \subset A.$$

1.1 Mengenoperationen

Es gibt weitere Möglichkeiten, aus bestehenden Mengen neue Mengen zu bilden; unter anderem die Vereinigung, der Durchschnitt und die Differenz. Für beliebige Mengen A und B schreiben wir die Vereinigung als $A \cup B$, den Durschnitt als $A \cap B$ und die (Mengen-)Differenz als $A \backslash B$.

Definition 5 (Vereinigung, Durchschnitt, Differenz)**:** Sei X eine Menge und A sowie B Teilmengen von X.

Die Vereinigung von A und B enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B vorhanden sind (wobei das »oder« hier kein auschließendes »oder« ist):

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

Der Durchschnitt enthält nur Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Die Differenz $A \backslash B$ enhält alle Elemente von A, die nicht in B sind:

$$A \backslash B := \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

1.2 Rechenregeln

Zum Abschluss des Mengenteils noch ein paar Rechenregeln für Mengen:

Bemerkung 3: Um die Gleichheit von zwei Mengen A und B zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass A eine Teilmenge von B ist und B eine Teilmenge von A ist.

Für den Beweis der Sätze benötigen wir die Distributivgesetze aus der Logik, die wir hier ohne Beweis wiedergeben:

Satz 2 (Distributivgesetze der Aussagenlogik)**:** Seien p,q, und r Aussagen. Dann gilt:

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, und
2. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Satz 3: Seien A, B und C beliebige Mengen. Folgende Aussagen sind richtig:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Beweis. Wir beweisen hier nur die erste Aussage.

$$\begin{array}{cll} & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap B \vee x \in A \cap C & \text{lt. Definition 5} \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) & \text{lt. Definition 5} \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) & \text{lt. Satz 2} \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \cup C) & \text{lt. Definition 5} \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap (x \in B \cup C) & \text{lt. Definition 5} \end{array}$$

Wir haben gezeigt, dass x genau dann ein Element von $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, wenn es auch ein Element von $A \cap (B \cup C)$ ist. Somit sind die Mengen gleich. □

2 Übungsbeispiele zum Kapitel »Mengen«

Beispiel 1: Beweise die Gleichheit folgender Mengen:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 16\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} : 8 - x \geq 4 \wedge x > 0\}.$$

Beispiel 2 (de Morgan'sche Regeln)**:** Sei C eine Menge, A und B Teilmengen von C. Das Komplement bezieht sich jeweils auf die Grundmenge C. Beweise folgende Aussagen:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cap B)} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{(A \cup B)} &= \overline{A} \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Beispiel 3: Skizziere folgende Mengen im $\mathbb{R}^2$: A, B, $A \cap B$ $A \backslash B$, $A \cup B$.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2x + 2\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-2, 2] \wedge y \in [-2, 4[\}$$

Beispiel 4: Beweise die Bemerkung 3.

3 Funktionen

Definition 6 (Funktion)**:** Seien X und Y zwei nichtleere Mengen ($X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$).
f heißt Funktion (Abbildung) von X nach Y :$\Leftrightarrow$
jedem Element x von X wird genau ein Element y von Y zugeordnet:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y : x \mapsto y \qquad \text{oder} \qquad \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : y = f(x)$$

Wir schreiben:

$$f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{cases}$$

X heißt Definitionsbereich von f (kurz: $X = \mathcal{D}_f$). Y heißt Wertevorrat von f. y heißt Bild von x unter der Abbildung f, x heißt Urbild von y unter f.

Beispiel 5: $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$
Dann sei $f : X \to Y$ eine Funktion definiert durch folgende Zuordnungsvorschrift:

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 2 \\ c & \mapsto & 2 \end{array}$$

Definition 7 (Bild, Urbild)**:** Seien X und Y zwei nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

1. Das Bild von f (kurz $f(X)$) ist die Menge aller Bilder von X unter f:

$$f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : \; f(x) = y\}$$

2. Sei A eine Teilmenge von X (also $A \subset X$).
   Dann ist das Bild von A unter f so festgelegt:

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A : \; f(x) = y\}$$

3. Sei B eine Teilmenge von Y (also $B \subset Y$).
   Dann ist das Urbild von B unter f so festgelegt:

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid \exists y \in B : \; f(x) = y\}$$

Beispiel 6: Die Voraussetzungen seien wie in Bsp 5. Dann gilt:

$$f(\{a, b\}) = \{1, 2\} \subset Y, \qquad f^{-1}(\{2\}) = \{b, c\} \subset X$$

Definition 8 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**:** Seien X und Y zwei nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.

1. f heißt injektiv :$\Leftrightarrow$ $\quad \forall x, y \in X \; : \; f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$
   (oder äquivalent: $\quad \forall x, y \in X \; : \; x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$)
2. f heißt surjektiv :$\Leftrightarrow$ $\quad \forall y \in Y \; \exists x \in X \; : \; f(x) = y$
3. f heißt bijektiv :$\Leftrightarrow$ f ist injektiv und f ist surjektiv.

Beispiel 7: An folgenden Beispielen sollen die Eigenschaften »injektiv«, »surjektiv«, »bijektiv« illustriert werden:

1. $f:\ \{a,b,c\} \to \{1,2,3,4\}$ mit $a \mapsto 1, b \mapsto 4, c \mapsto 3$ ist injektiv.
2. $g:\ \{1,2,3\} \to \{1,2\}$ mit $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2$ ist surjektiv.
3. $h:\ \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ mit $1 \mapsto c, 2 \mapsto b, 3 \mapsto a$ ist bijektiv.

Satz 4 (Charakterisierung von »injektiv«): Seien $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann gilt:
f ist injektiv $\quad\Leftrightarrow\quad \forall A, B \subset X \quad : \quad f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B)$

Beweis. Eine Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) besteht immer aus zwei Richtungen: $\Rightarrow$ und $\Leftarrow$.

»$\Rightarrow$« Sei also f injektiv. Seien $A, B \subset X$ beliebig. Dann ist zu zeigen: $f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B)$. Für Mengengleichheit zeigt man, dass beide Mengen jeweils Teilmenge der anderen sind (vgl. Bemerkung 3).

»$\subset$« Seien $y \in f(A\backslash B)$ und $x \in A \setminus B$ mit $y = f(x)$. Wegen $x \in A$ ist $f(x) \in f(A)$ und wegen $x \notin B$ gilt $\forall b \in B : x \neq b$. Da f nun injektiv ist, gilt auch $\forall b \in B : f(x) \neq f(b)$ und damit $f(x) \notin f(B)$. Insgesamt ist also $y = f(x) \in f(A)\backslash f(B)$.

»$\supset$« Sei $y \in f(A)\backslash f(B)$, dann ist $y \in f(A)$ und $y \notin f(B)$. Sei nun $x \in A$ mit $y = f(x)$. Dann kann x nicht in B sein, da sonst $y = f(x) \in f(B)$ wäre. Also ist $x \in A\backslash B$ und damit $y = f(x) \in f(A\backslash B)$.

»$\Leftarrow$« Wir führen einen sogenannten indirekten Beweis. Es ist also zu zeigen:
f ist nicht injektiv $\quad\Rightarrow\quad \exists A, B \subset X \quad : \quad f(A\backslash B) \neq f(A)\backslash f(B)$

D.h. wir müssen zwei passende Teilmengen A, B von X finden. Da f nicht injektiv ist, gibt es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Setze $A := \{x, y\}$ und $B := \{y\}$, dann gilt: $A, B \subset X$, $f(A\backslash B) = f(\{x,y\}\backslash\{y\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \neq \emptyset$ und $f(A)\backslash f(B) = f(\{x,y\})\backslash f(\{y\}) = \{f(x), f(y)\}\backslash\{f(y)\} = \{f(y)\}\backslash\{f(y)\} = \emptyset$. Also folgt insbesondere $f(A\backslash B) \neq f(A)\backslash f(B)$.

Somit ist die Äquivalenz gezeigt und der Satz bewiesen. $\square$

Definition 9 (Hintereinanderausführung)**:** Seien X, Y, Z drei nichtleere Mengen und f und g Funktionen, die wie folgt definiert sind:

$$f : X \to Y \text{ mit } x \mapsto f(x) \text{ und } g : Y \to Z \text{ mit } y \mapsto f(y)$$

Dann heißt $g \circ f$ (sprich: »g nach f«) die Hintereinanderausführung von f und g und ist folgendermaßen definiert:

$$g \circ f : \quad X \to Z \qquad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Bemerkung 4: Damit die Hintereinanderausführung wohldefiniert ist, muss insbesondere gelten: $f(X) \subset Y$ und $D_{g \circ f} \subset X$

Beispiel 8: Ein Beispiel, um die obige Bemerkung zu erläutern:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \tfrac{2}{x}$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$g(f(x)) = g(\tfrac{2}{x}) = \frac{1}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{2-x}{x}} = -\frac{-x}{2-x} = -\left(\frac{2-x-2}{2-x}\right) = -1 - \frac{2}{x-2}$$

4 Übungsbeispiele zum Kapitel »Funktionen«

Beispiel 9: Bestimme $D \subset \mathbb{R}$ maximal groß, sodass $f : D \to \mathbb{R}$ jeweils eine wohldefinierte Funktion ist. Bestimme weiters das Bild von f (laut Definition des Bildes!). Skizziere jeweils die Funktion (ohne Hilfe einer Kurvendiskussion).

$$f(x) = \sqrt{7-x} - 1 \qquad \text{bzw} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Beispiel 10: Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Finde maximal große Definitionsbereiche ($\subset \mathbb{R}$), sodass

$$f : D_f \to \mathbb{R} \qquad g : D_g \to \mathbb{R} \qquad g \circ f : D_{g\circ f} \to \mathbb{R} \qquad f \circ g : D_{f\circ g} \to \mathbb{R}$$

jeweils wohldefinierte Funktionen sind. Die Abbildungsvorschriften von f und g lauten:

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Beispiel 11: Untersuche f auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 2} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \qquad f(x) = x^2 + 2$$

Beispiel 12: Seien $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Beweise folgende Behauptung: Wenn f injektiv ist, dann gilt:

$$\forall A \subset X \quad \forall B \subset X \quad : \quad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

Beispiel 13: Zeige, dass die Aussage in Bsp 12 nicht gilt, wenn f nicht injektiv ist. (Finde z. B. ein passendes Gegenbeispiel)

5 Ein Einblick in die abstrakte Welt der Hochschulmathematik...

Nachfolgend wollen wir einen winzig kleinen Einblick geben, was man sich darunter vorstellen kann, wenn es heißt: »Das Mathematik-Studium ist sehr abstrakt.«

5.1 Eine Menge Funktionen

Denken wir uns eine nichtleere Menge D und eine zweite, ebenfalls nichtleere Menge Y. Nun definieren wir eine Menge V als die Menge aller Funktionen von D nach Y, also

$$V := \{f \mid f : D \to Y,\ f \text{ ist eine wohldefinierte Funktion}\}$$

Wir stellen kurz fest: Hat Y unendlich viele Elemente, so ist die Menge V ebenfalls unendlich.

5.2 Erlaubnis zum Rechnen

Interessanter wird das Ganze nun, wenn man in der Menge Y »rechnen« kann. (Man kann grundsätzlich nicht einfach in einer beliebigen Menge rechnen, wie uns das zweite Beispiel nach der Definition 1 zeigt). Mit »Rechnen« meinen wir zunächst, dass wir zwei beliebige Elemente aus Y »zusammenzählen« können und die »Summe[1]« jedesmal wieder in Y landet, also

$$\forall x, y \in Y \ : \ x + y \in Y$$

Wir beachten allerdings, dass dieses $+$ nicht das übliche Plus zwischen zwei reellen Zahlen meint, da wir ja nicht genau wissen, wie die Elemente der Menge Y aussehen. Trotzdem wollen wir weitere Forderungen an die Menge Y stellen, sodass dann vergleichbare Rechenregeln wie in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gelten, was uns dazu zwingt, so etwas wie eine »Null« zu fordern und bezeichnen dieses eine besondere Element mit e. Es soll also ein Element e (»additiv neutrales Element«) geben, das jedes vorhandene Element y aus Y nicht verändert, egal von welcher Seite es addiert wird:

$$\forall y \in Y \ : \ y + e = e + y = y\,.$$

Der Einfachheit halber wollen wir auch noch fordern, dass unsere Addition in Y kommutativ ist, d. h.

$$\forall x, y \in Y \ : \ x + y = y + x\ ,$$

sowie das Assoziativ-Gesetz erfüllt sein soll (Rechenreihenfolge/Klammerungen sind egal). Außerdem wollen wir eine weitere Eigenschaft fordern, die die reellen Zahlen und die übliche Addition hat, nämlich, dass es zu jeder Zahl einen sogenannte »Gegenzahl« (additiv Inverses) gibt. Abstrakt hingeschrieben fordern wir:

$$\forall a \in Y\ \exists! b \in Y \ : \ a + b = e$$

Üblicherweise wird dann b mit »$-a$« bezeichnet und die Rechnung $a + (-b)$ mit $a - b$ abgekürzt. Mittlerweile haben wir an die Menge Y schon viele Forderungen gestellt, wie wir in dieser Menge rechnen können wollen. Wir haben also in Y schon ein beachtliche algebraische Struktur, die man im Mathematik-Studium »kommutative, additive Gruppe« nennen würde. Diese schöne Struktur nützen wir nun aus, um eine »Addition« in V einzuführen.

[1] Man kann sich die Summe somit als Funktion »+« vorstellen, die zwei Elemente als Argumente benötigt und deren Bild wieder in Y enthalten ist

5.3 Wie »addiert« man Funktionen?

Um Verwechslungen zu vermeiden und um das Verständnis zu erhöhen wollen wir die neu geschaffene Addition in V mit $\oplus$ bezeichnen. Wir definieren nun also für beliebiges f und g aus V die Summenfunktion $f \oplus g : D \to Y$ wie folgt: Für alle $x \in D$ definiere

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x) \ ,$$

und wir sagen, dass wir darunter die wertweise Addition verstehen. Man beachte, dass $\oplus$ zwischen zwei Funktionen steht, $+$ dagegen zwischen zwei (nicht näher definierten) Elementen aus Y. Genaugenommen müssten wir uns noch überlegen, dass unsere Funktion $f \oplus g$ wieder in V enthalten ist. Nun zu den interessanteren Aspekten dieser neu erschaffenen Addtition in V. Es wird sich nämlich herausstellen, dass sich mehr oder weniger Rechenregeln von Y auf V übertragen, was wir uns jetzt überlegen wollen:

Auch in V wollen wir nun ein additiv neutrales Element finden, also eine Funktion $\mathbf{0}$ (genannt: Nullfunktion), für die gilt: $f \oplus \mathbf{0} = f$ für alle $f \in V$. Wir definieren die Funktion $\mathbf{0} : D \to Y$ mit $0(x) = e$ für alle $x \in D$. Diese Funktion verfügt nun über die oben gewünschte Eigenschaft, denn:

$$\forall x \in D \ : \ (f \oplus \mathbf{0}) := f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) + e = f(x) \ .$$

In weiterer Folge wollen wir auch nachrechnen, dass es zu jedem $f \in V$ eine additive inverse Funktion g gibt, sodass die Gleichung $f \oplus g = \mathbf{0}$ erfüllt ist. Sei also $f \in V$, dann definiere zu diesem f die Funktion $g : D \to Y$ mit $g(x) = -f(x)$ für alle $x \in D$, wobei mit $-f(x)$ das additiv inverse Element von $f(x)$ in Y gemeint ist.

5.4 Beispiele zur »Veranschaulichung« und Verständnisüberprüfung

Beispiel 14: $D := \{x, y\}$, $Y := \{a, b\}$. Die Addition $+$ in Y ist wie folgt definiert: $a + a := a$, $b+b := a$, $a+b := b$ und Kommutativ-Gesetz und Assoziativ-Gesetz seien erfüllt. Man bestimme nun die Menge V und gebe konkret an, wie je zwei der Funktionen aus V addiert werden und welche Summenfunktion jeweils dabei entsteht.

Beispiel 15: $D := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition $+$. Man mache sich anhand von Skizzen klar, was die Addition $\oplus$ in V grafisch bedeutet, wie zu einer grafisch gegeben Funktion f die additiv inverse Funktion aussieht und wie die additiv neutrale Funktion von V aussieht.

ig-mathe
Studienvertretung Mathematik an der KFU Graz
Internet: oehweb.uni-graz.at/mathematik/
Mail: mathematik@oehunigraz.at