Warum Mathe?

IG/StV-Mathematik der KFU-Graz

März 2011

Inhalt

1 Mengen

Definition 1. *„Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.“ (Cantor)*

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Mengen zu definieren. Durch (komplette) Aufzählung der Elemente:

$$\{1, 2, 3\} \quad \text{bzw.} \quad \{Hans, Martin, Lisa\} \quad \text{bzw.} \quad \{1, 2, 3, \ldots, 7\},$$

oder durch Angaben von Eigenschaften, die alle Elemente der Menge erfüllen:

$$\{x : P(x)\}$$

ist die Menge aller x, für welche die Aussage $P(x)$ wahr ist.
Hierbei ist es notwendig, dass eine Grundmenge angegeben wird, da z. B.

$$\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 9\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 9\}$$

verschiedene Mengen definieren. (Notationshinweis: Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Durch Auswahl von Elementen aus einer Menge entstehen neue Mengen, sogenannte *Teilmengen*.

Definition 2 (Teilmengen). *Seien M und N Mengen. M ist Teilmenge von N (kurz: $M \subset N$genau dann, wenn gilt:*

$$\forall x \in M : x \in N.$$

N heißt dann Obermenge von M (kurz: $N \supset M$.

Definition 3 (Komplement). *Seien M und N Mengen; $M \subset N$. Die Menge*

$$\overline{M} := \{x \in N : x \notin M\}$$

heißt Komplement von M in N.

Definition 4 (Leere Menge). *Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge. Wir schreiben dafür $\emptyset$.*

Bemerkung 1. *Existenzaussagen ($\exists x \in \emptyset : \widehat{P}(x)$) sind für die leere Menge immer falsch, da es kein Element in der leeren Menge gibt, auf das die Eigenschaft P zutreffen kann.*

Was aber gilt für Allaussagen ($\forall x \in \emptyset : P(x)$) im Zusammenhang mit der leeren Menge? Sind die auch alle falsch, oder etwa richtig, oder kommt es auf die Situation an? Zeit für den ersten Beweis!

Satz 1. *Folgende Aussage ist für alle Aussageformen $P(x)$ richtig: $\forall x \in \emptyset : P(x)$.*

Beweis. Sei $P(x)$ eine beliebige Aussageform und $Q(x)$ die Aussage: $\forall x \in \emptyset : P(x)$. Laut Logikregeln gilt, dass $Q(x)$ genau dann richtig ist, wenn die Negation von $Q(x)$ (wir schreiben: $\neg Q(x)$) falsch ist.

$$\neg Q(x) = \neg \forall x \in \emptyset : P(x) = \exists x \in \emptyset : \neg P(x).$$

Da laut Bemerkung 1 Existenzaussagen für die leere Menge (mit $\widehat{P}(x) = \neg P(x)$) immer falsch sind, ist somit $\neg Q(x)$ falsch und damit die Aussage $Q(x)$ wahr. Da $P(x)$ eine beliebige Aussageform war, gilt dieser Beweis für alle Aussageformen $P(x)$. Somit ist Satz 1 bewiesen. □

Bemerkung 2. *Folgende Aussagen gelten für jede beliebige Menge A:*

$$A \subset A \quad \textit{sowie} \quad \emptyset \subset A.$$

1.1 Mengenoperationen

Es gibt weitere Möglichkeiten, aus bestehenden Mengen neue Mengen zu bilden; unter anderem die Vereinigung, der Durchschnitt und die Differenz. Für beliebige Mengen A und B schreiben wir die Vereinigung als $A \cup B$, den Durschnitt als $A \cap B$ und die (Mengen-)Differenz als $A \backslash B$.

Definition 5 (Vereinigung, Durchschnitt, Differenz)**.** *Sei X eine Menge und A sowie B seine Teilmengen von X. Die Vereinigung von A und B enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B vorhanden sind (wobei das „oder" hier kein auschließendes „oder" ist):*

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

Der Durchschnitt enthält nur Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Die Differenz $A \backslash B$ enhält alle Elemente von A, die nicht in B sind:

$$A \backslash B := \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

1.2 Rechenregeln

Zum Abschluss des Mengenteils noch ein paar Rechenregeln für Mengen:

Bemerkung 3. *Um die Gleichheit von zwei Mengen A und B zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass A eine Teilmenge von B ist und B eine Teilmenge von A ist.*

Für den Beweis der Sätze benötigen wir die Distributivgesetze aus der Logik, die wir hier ohne Beweis wiedergeben.

Satz 2 (Distributivgesetze der Aussagenlogik)**.** *Seien p,q, und r Aussagen. Dann gilt:*

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, *und*
2. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Satz 3. *Seien A, B und C beliebige Mengen. Folgende Aussagen sind richtig:*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Beweis. Wir beweisen hier nur die erste Aussage.

$$\begin{array}{lll} & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap B \vee x \in A \cap C & \text{lt. Definition 5} \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) & \text{lt. Definition 5} \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) & \text{lt. Satz 2} \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \cup C) & \text{lt. Definition 5} \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap (x \in B \cup C) & \text{lt. Definition 5} \end{array}$$

Wir haben gezeigt, dass x genau dann ein Element von $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, wenn es auch ein Element von $A \cap (B \cup C)$ ist. Somit sind die Mengen gleich.

$\square$

2 Übungsbeispiele zum Kapitel „Mengen“

Beispiel 1. *Beweise die Gleichheit folgender Mengen:*

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 16\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Z} : 8 - x \geq 4 \wedge x > 0\}.$$

Beispiel 2 (de Morgan'sche Regeln)**.** *Sei C eine Menge, A und B Teilmengen von C. Das Komplement bezieht sich jeweils auf die Grundmenge C. Beweise folgende Aussagen:*

$$\begin{array}{rcl} \overline{(A \cap B)} & = & \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{(A \cup B)} & = & \overline{A} \cap \overline{B}. \end{array}$$

Beispiel 3. *Skizziere folgende Mengen im $\mathbb{R}^2$: A, B, $A \cap B$ $A \backslash B$, $A \cup B$.*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2x + 2\} \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-2, 2] \wedge y \in [-2, 4[\}$$

Beispiel 4. *Beweise die Bemerkung 3.*

3 Funktionen

Definition 6 (Funktion)**.** *Seien X und Y zwei nichtleere Mengen ($X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$).*
f heißt Funktion (Abbildung) von X nach Y :$\Leftrightarrow$
jedem Element x von X wird genau ein Element y von Y zugeordnet:

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y : x \mapsto y \qquad \text{oder} \qquad \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : y = f(x)$$

Wir schreiben:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array} \right.$$

X heißt Definitionsbereich von f (kurz: $X = \mathcal{D}_f$). Y heißt Wertevorrat von f. y heißt Bild von x unter der Abbildung f, x heißt Urbild von y unter f.

Beispiel 5. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$
Dann sei $f : X \to Y$ eine Funktion definiert durch folgende Zuordnungsvorschrift:

$$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 2 \\ c & \mapsto & 2 \end{array}$$

Definition 7 (Bild, Urbild)**.** *Seien X und Y zwei nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.*

1. *Das Bild von f (kurz $f(X)$) ist die Menge aller Bilder von X unter f:*

$$f(X) := \{y \in Y \quad | \quad \exists x \in X : \quad f(x) = y\}$$

2. *Sei A eine Teilmenge von X (also $A \subset X$).*
   Dann ist das Bild von A unter f so festgelegt:

$$f(A) := \{y \in Y \quad | \quad \exists x \in A : \quad f(x) = y\}$$

3. *Sei B eine Teilmenge von Y (also $B \subset Y$).*
   Dann ist das Urbild von B unter f so festgelegt:

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \quad | \quad \exists y \in B : \quad f(x) = y\}$$

Beispiel 6. *Die Voraussetzungen seien wie in Bsp 5. Dann gilt:*

$$f(\{a,b\}) = \{1,2\} \subset Y, \qquad f^{-1}(\{2\}) = \{b,c\} \subset X$$

Definition 8 (injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** *Seien X und Y zwei nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.*

1. *f heißt injektiv* $:\Leftrightarrow \quad \forall x,y \in X \quad : \quad f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$
   (oder äquivalent: $\quad \forall x,y \in X \quad : \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$*)*

2. *f heißt surjektiv* $:\Leftrightarrow \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad : \quad f(x) = y$

3. *f heißt bijektiv $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv und f ist surjektiv.*

Beispiel 7. *An folgenden Beispielen sollen die Eigenschaften „injektiv“, „surjektiv“, „bijektiv“ illustriert werden:*

1. $f: \quad \{a,b,c\} \to \{1,2,3,4\}$ *ist injektiv.*
   $$\begin{array}{ccc} a & \mapsto & 1 \\ b & \mapsto & 4 \\ c & \mapsto & 3 \end{array}$$

2. $g: \quad \{1,2,3\} \to \{1,2\}$ *ist surjektiv.*
   $$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

3. $h: \quad \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ *ist bijektiv.*
$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & c \\ 2 & \mapsto & b \\ 3 & \mapsto & a \end{array}$$

Satz 4 (Charakterisierung von „injektiv"). *Seien $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ zwei Mengen und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann gilt:*
f ist injektiv $\quad \Leftrightarrow \quad \forall A, B \subset X \quad : \quad f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$

Beweis. Eine Äquivalenz ($\Leftrightarrow$) besteht immer aus zwei Richtung: $\Rightarrow$ und $\Leftarrow$.

„$\Rightarrow$" Sei also f injektiv. Seien $A, B \subset X$ beliebig. Dann ist zu zeigen: $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$. Für Mengengleichheit zeigt man, dass beide Mengen jeweils Teilmenge der anderen sind (vgl. Bemerkung 3).

„$\subset$" Seien $y \in f(A \backslash B)$ und $x \in A \setminus B$ mit $y = f(x)$. Wegen $x \in A$ ist $f(x) \in f(A)$ und wegen $x \notin B$ gilt $\forall b \in B : x \neq b$. Da f nun injektiv ist, gilt auch $\forall b \in B : f(x) \neq f(b)$ und damit $f(x) \notin f(B)$. Insgesamt ist also $y = f(x) \in f(A) \backslash f(B)$.

„$\supset$" Sei $y \in f(A) \backslash f(B)$, dann ist $y \in f(A)$ und $y \notin f(B)$. Sei nun $x \in A$ mit $y = f(x)$. Dann kann x nicht in B sein, da sonst $y = f(x) \in f(B)$ wäre. Also ist $x \in A \backslash B$ und damit $y = f(x) \in f(A \backslash B)$.

„$\Leftarrow$" Wir führen einen sogenannten indirekten Beweis. Es ist also zu zeigen:
f ist nicht injektiv $\quad \Rightarrow \quad \exists A, B \subset X \quad : \quad f(A \backslash B) \neq f(A) \backslash f(B)$
D.h. wir müssen zwei passende Teilmengen A, B von X finden. Da f nicht injektiv ist, gibt es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $f(x) = f(y)$. Setze $A := \{x, y\}$ und $B := \{y\}$, dann gilt: $A, B \subset X$, $f(A \backslash B) = f(\{x,y\} \backslash \{y\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\} \neq \emptyset$ und $f(A) \backslash f(B) = f(\{x,y\}) \backslash f(\{y\}) = \{f(x), f(y)\} \backslash \{f(y)\} = \{f(y)\} \backslash \{f(y)\} = \emptyset$. Also folgt insbesondere $f(A \backslash B) \neq f(A) \backslash f(B)$.

Somit ist die Äquivalenz gezeigt. □

Definition 9 (Hintereinanderausführung). *Seien X, Y, Z drei nichtleere Mengen und f und g Funktionen, die wie folgt definiert sind:*

$$f: X \to Y \text{ mit } x \mapsto f(x) \text{ und } g: Y \to Z \text{ mit } y \mapsto f(y)$$

Dann heißt $g \circ f$ (sprich: „g nach f") die Hintereinanderausführung von f und g und ist folgendermaßen definiert:

$$g \circ f: \quad X \to Z \qquad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Bemerkung 4. *Damit die Hintereinanderausführung wohldefiniert ist, muss insbesondere gelten: $f(X) \subset Y$ und $D_{g \circ f} \subset X$*

Beispiel 8. *Ein Beispiel, um die obige Bemerkung zu erläutern:*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \tfrac{2}{x}$$

$$g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2 \qquad \Rightarrow \quad D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$$

$$g(f(x)) = g(\tfrac{2}{x}) = \frac{1}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{2-x}{x}} = -\frac{-x}{2-x} = -\left(\frac{2-x-2}{2-x}\right) = -1 - \frac{2}{x-2}$$

4 Übungsbeispiele zum Kapitel „Funktionen“

Beispiel 9. *Bestimme $D \subset \mathbb{R}$ maximal groß, sodass $f : D \to \mathbb{R}$ jeweils eine wohldefinierte Funktion ist. Bestimme weiters das Bild von f (laut Definition des Bildes!). Skizziere jeweils die Funktion (ohne Hilfe einer Kurvendiskussion).*

$$f(x) = \sqrt{7-x} - 1 \qquad \textit{bzw} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

Beispiel 10. *Gegeben sind die Funktionen*

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad \textit{und} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Finde maximal große Definitionsbereiche ($\subset \mathbb{R}$), sodass

$$f : D_f \to \mathbb{R} \qquad g : D_g \to \mathbb{R} \qquad g \circ f : D_{g\circ f} \to \mathbb{R} \qquad f \circ g : D_{f\circ g} \to \mathbb{R}$$

jeweils wohldefinierte Funktionen sind. Die Abbildungsvorschriften von f und g lauten:

$$f(x) = 4 - x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Beispiel 11. *Untersuche f auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 2} := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\} \qquad f(x) = x^2 + 2$$

Beispiel 12. *Seien $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$ Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Beweise folgende Behauptung: Wenn f injektiv ist, dann gilt:*

$$\forall A \subset X \quad \forall B \subset X \quad : \quad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$$

Beispiel 13. *Zeige, dass die Aussage in Bsp 12 nicht gilt, wenn f nicht injektiv ist. (Finde z. B ein passendes Gegenbeispiel)*